Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Факультет математики та інформатики

ЗАТВЕРДЖЕНО
Голова приймальної комісії

Роман ПЕТРИШИН

20 січня 2022 р.

ПРОГРАМА
вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності
111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою факультету
математики та інформатики
Голова Вченої ради
__________Ольга МАРТИНЮК
(протокол №5 від 22.12.2021 р.)

Чернівці – 2022

Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.
2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції; похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.
3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.
4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.
5. Числові ряди: означення збіжності; критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.
6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів; почленне інтегрування та диференціювання; степеневі ряди та їх основні властивості; розклад елементарних функцій у степеневі ряди.
7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційовність; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.
8. Невласні інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; рівномірна збіжність невласних інтегралів, залежних від параметра; властивості функцій, що визначаються невласними інтегралами (інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру).
9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невласні кратні інтеграли.
10. Криволінійні та поверхневі інтеграли: означення, властивості, обчислення; формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса.
11. Ряди та інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є, перетворення Фур'є.

Лінійна алгебра

1. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.

2. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера - Капеллі); теорема про структуру розв'язків. Формула для обчислення оберненої матриці.
4. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; знаходження функцій від оператора; теорема Гамільтона – Келі.
5. Спектральна теорія самоспряжених операторів: білінійна та квадратична форми оператора; теорема про існування спряженого оператора; самоспряжений оператор; матриці спряженого та самоспряженого оператора, їх властивості; власні числа та власні елементи самоспряженого оператора, їх властивості, спектральне зображення самоспряженого оператора; зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
6. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор-групи.

Функціональний аналіз та інтегральні рівняння

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі R^n, $n \geq 2$.
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.
3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла; простори L_p, $p \geq 1$.
4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори; означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і КО в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з КО.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.
9. Лінійні інтегральні рівняння: метод послідовних наближень для рівнянь Вольтерри і Фредгольма; теореми Фредгольма; теорема Гільберта – Шмідта для рівнянь з симетричним ядром.

10. Узагальнені функції: означення, приклади; диференціювання; перетворення Фур'є.

Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь: означення типу та класифікація розв‘язків; розв‘язність елементарних квазілінійних рівнянь першого порядку.
2. Теорема існування та єдиності розв‘язків задачі Коші для рівнянь та систем рівнянь. Особливі точки і особливі розв‘язки диференціальних рівнянь.
3. Лінійні диференціальні рівняння: структура загального розв‘язку; знаходження розв‘язків лінійних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами; методи знаходження частинних розв‘язків неоднорідних рівнянь та систем.
4. Стійкість розв‘язків систем нелінійних рівнянь: означення, метод функцій Ляпунова дослідження на стійкість за першим наближенням.
5. Крайові задачі для нелінійних рівнянь: теореми існування, інтегральне зображення розв‘язку за допомогою функції Гріна; власні значення та власні функції однорідної крайової задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля.
6. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку, побудова загального розв‘язку, розв‘язність задачі Коші.

Рівняння з частинними похідними

1. Класифікація рівнянь з частинними похідними: рівняння 2-го порядку, їх типи та зведення до канонічної форми; гіперболічні, еліптичні та параболічні рівняння довільного порядку.
2. Задача Коші для рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; доведення єдиності методом Хольмгрена.

3. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.

Загальна топологія

1. Аксіоми топологічної структури. Означення топології та топологічного простору. Замкнені і відкриті множини. Характеризація відкритих підмножин числової прямої.
2. Внутрішні точки і точки дотику. Внутрішність множини та її властивості. Замикання множини та його властивості. Властивості оператора замикання. Зв'язок між замиканням і внутрішністю. Властивості оператора внутрішності
3. Аксіоми відокремності: T_1, T_2, T_3, $T_{3,5}$, T_4. Гаусдорфовість і нормальність метричного простору. Лема Урисона.
4. Множини типу F_σ і G_δ. Функціонально відкриті і функціонально замкнені множини. Досконало нормальні простори і теорема Веденісова

Список літератури

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.
2. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.
4. Матерник В.А., Соболев В.И. Краткий курс фунционального анализа.
5. Березанский, Ус, Шефтель. Функциональный анализ.
6. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.
7. Степанов В.В. Курс диференціальних рівнянь.
8. Ляшко, Боярчук, Тай, Калайда. Диференціальні рівняння.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
10. Михайлов В.П. Диференциальные уравнения в частных производных.
11. Петровский И.Т. Лекции об уравнениях с частными производными.
12. Тихонов, Самарский. Уравнения математической физики.
13. Энгелькинг Р. Общая топология